DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ETSI Inf.
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

CALCULO I.
FUNCIONES DE UNA VARIABLE: LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD.

Índice general

Capítulo 1

Funciones. Límites y continuidad

1.1. Funciones: dominio e imagen. Tipos de funciones.

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una ley o correspondencia que hace corresponder a cada $x \in A$ un único valor real que llamamos $f(x)$ o imagen mediante f de x.
El dominio de una función f es el conjunto de los números reales para los que existe $f(x)$. Si no se indica otra cosa, la función se considera definida en su dominio:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ existe } f(x)\}.$$

El dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Observación 1. *El dominio puede ser incluso el cojunto vacío, considerar por ejemplo* $f(x) = \frac{\sqrt{x}\sqrt{-x}}{x}$ *cuyo dominio es el conjunto vacío o un único punto como para* $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{-x}$ *cuyo dominio es* $\{0\}$*. Nosotros en general consideraremos funciones cuyos dominios son intervalos o unión (incluso infinita) de intervalos*

Ejemplos de dominios de funciones elementales son:

1. Si $f(x) = p(x)$ es un polinomio el dominio de f es $\mathbb{R}$.
2. Si $f(x)) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional donde $P(x), Q(x)$ son polinomios entonces

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

3. Si $f(x) = \sqrt{x}$ se tiene que $Dom(f) = [0, \infty)$.
4. Si $f(x) = \log x$ entonces $Dom(f) = (0, \infty)$.

5. Las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$ y $cos(x)$ tienen como dominio $\mathbb{R}$.

6. La función $f(x) = \tan x$ tiene como dominio

$$Dom(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{-\pi}{2} + (k+1)\pi \right)$$

7. La función $fx) = x^x$ se define como $f(x) = e^{x\log(x)}$ y por tanto $Dom(f) = (0, \infty)$.

Ejemplo 2. *Si $f(x) = x^{p/q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ y p/q fracción irreducible, obtener $Dom(f)$ en cada caso. Sugerencia: considerar los casos de p y q pares o impares.*

Definición 3. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to B$*

1. *Diremos que $f(x)$ es inyectiva en A si dados $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$ se tiene que $x = y$.*

2. *Diremos que $f(x)$ es sobreyectiva sobre B si para todo $y \in B$ existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

3. *Diremos que $f : A \to B$ es biyectiva de A a B si es inyectiva en A y sobreyectiva sobre B.*

Definición 4. *Si $f : A \to B$ dada por $y = f(x)$ es una función biyectiva entonces para cada $y \in B$ hay un único $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Esto nos permite definir una función, que llamaremos inversa de f y denotamos por f^{-1}, $f^{-1} : B \to A$, con $x = f^{-1}(y)$ de modo que:*

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \qquad\qquad f(f^{-1}(y)) = y, \qquad y \in B$$

Observación 5. *Gráficamente la inyectividad repercute en que trazando una recta horizontal en los valores de la imagen dicha recta sólo corta a la gráfica en un valor. Si alguna horizontal corta a la gráfica en dos o más valores claramente dicha función no sería inyectiva. Gráficamente la función es sobreyectiva sobre un conjunto B si trazando una horizontal sobre cada punto de B la gráfica de f corta en algún punto a la horizontal.*

Observación 6. *Es interesante observar que hay funciones que son inyectivas en un determinado conjunto y no lo son en otros; por ejemplo la función $f(x) = x^4$ ¿es inyectiva en $\mathbb{R}$? ¿Es inyectiva en $(0, \infty)$? ¿Es inyectiva en $(-1/4, 1/16)$?*

Definición 7. *Diremos que una función es par si para todo* $x \in Dom(f)$

$$f(x) = f(-x)$$

Definición 8. *Diremos que una función es impar si para todo* $x \in Dom(f)$

$$f(-x) = -f(x)$$

Definición 9. *Diremos que una función es periódica con período* $T > 0$ *si para todo* $x \in Dom(f)$ *se tiene que*

$$f(x + T) = f(x)$$

Observación 10. *Estas propiedades tienen una gran repercusión en la gráfica:*

1. *Las gráficas de las funciones pares en* $\mathbb{R}$ *son simétricas con respecto al eje vertical, es decir, la recta* $x = 0$*.*

2. *Las gráficas de las funciones impares en* $\mathbb{R}$ *son simétricas con respecto al origen.*

3. *En las gráficas de las funciones periódicas en* $\mathbb{R}$ *con período* $T > 0$ *la gráfica en* $(0, T)$ *se repite en cada intervalo* $(kT, (k + 1)T)$ *con* $K \in \mathbb{Z}$*, por lo tanto basta obtener la gráfica en* $(0, T)$ *y trasladar.*

Ejercicios: Completa la gráfica de una función f conociendo la gráfica en $[0, \infty)$ en el caso de funciones pares e impares. Completa la gráfica para funciones periódicas: por ejemplo la función $f(x) = x$ si $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 1$ si $1 < x \leq 2$, y que sea periódica de período 2.
• Considera la función $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$: ¿es par? ¿es impar? ¿es periódica?

Definición 11. *(Composición de funciones:) Sea* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$*, definimos la función composición de* f *con* g*, denotada por* $g \circ f$ *a la función*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

.

Observación 12. *Nótese que para que la composición de* f *con* g *esté bien definida* $Im(f) \subset Dom(g)$*.*

1.2. Límites de funciones.

El objetivo de esta sección es estudio del límite de una función en un punto a, es decir,

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Con el estudio de dicho límite lo que hacemos es observar el comportamiento de los valores de la función $f(x)$ cuando x está cerca de a pero no es a ; si los valores $f(x)$ cuando $x \sim a$ se aproximan a un valor L, diremos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Antes de dar las definiciones, vmos distintos comportamientos de funciones cerca del origen: consideramos las funciones:

1. $f(x) = x$ si $x \sim 0$; es claro que en este caso los valores de $f(x)$ si $x \sim 0$ están próximos a cero. Este caso será un ejemplo de
$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ si $x \sim 0$; es claro que en este caso $f(x) = 1$ si $x \sim 0$ siendo $x > 0$ y $f(x) = -1$ si $x \sim 0$ y $x < 0$; por lo tanto, como veremos los límites laterales no coinciden y
$$\text{NO EXISTE} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = 0.$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; es claro que en este caso si $x \sim 0$ los valores $f(x)$ son muy grandes, será un ejemplo de
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

4. $f(x) = x$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$; en este caso si $x \sim 0$ pero $x \neq 0$ los valores de $f(x)$ se aproximan a 0 luego será un ejemplo de
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; si $x \sim 0$ y $x > 0$ se tiene que $f(x)$ es muy grande y positivo; y si $x \sim 0$ y $x < 0$ los valores son negativos y tienden a $-\infty$; es claro que
$$\text{NO EXISTE} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0.$$

Observación 13. *Una observación interesante es que en el estudio del límite de una función cerca de a no se tiene en cuenta el valor de f en a, sin embargo lo que se estudia es lo que ocurre cerca de a. Para ello nos tenemos que asegurar de que existan puntos tan cercanos a a como se quiera . Para ello consideramos funciones cuyo dominio contiene algún intervalo centrado en a aunque no necesariamente el punto a pertenece al dominio, es decir en intervalos estrellados del tipo $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$.*

En lo que sigue formalizamos la idea de $f(x)$ cerca de L si $x \sim a$ mediante la definición del límite de una función:

Definición 14. *Sea f definida en $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$. Diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ entonces*

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Observación 15. *Nótese que la condición $0 < |x-a|$ es para que se tenga en cuenta que $x \neq a$.*

De forma análoga se definen los límites laterales.

Definición 16. *Sea f definida en el intervalo $(a-r, a)$ para algún $r > 0$. Diremos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta$ entonces*

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

De forma análoga se define $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$. Definimos ahora los límites infinitos.

Definición 17. *Sea f definida en $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$. Diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ si para todo $R > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ se tiene que*

$$f(x) > R$$

De forma análoga se definen los límites $-\infty$ y los límites laterales ∞ y $-\infty$.
El principal resultado en relación con los límites laterates es:

Proposición 18. *Sea f definida en $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$ y $L \in \mathbb{R}$ o $L = \infty$ o $L = -\infty$. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si existen los dos límites laterales y además coinciden, es decir,*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Corolario 19. *Supongamos que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Entonces NO EXISTE $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ejemplo 20. *NO EXISTE* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$. *En efecto:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$$

Observación 21. *El resultado sobre los límites laterales es cierto también cuando* $L = \infty, -\infty$. *Por lo tanto NO EXISTE* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ *ya que*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}.$$

1.2.1. Propiedades artiméticas de los límites.

Proposición 22. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$ *entonces:*

1.
$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M.$$

2.
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM.$$

3. *Si* $M \neq 0$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Observación 23. *La propiedad es la misma si cambiamos límites por límites laterales.*

En el caso de que $L \neq 0$ y $M = 0$ podemos aplicar el siguiente resultado:

Proposición 24. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *y existe algún* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in (a - r, a + r) \setminus \{a\}$ *entonces*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

1.2.2. Criterio del Sandwich.

Proposición 25. *(Criterio del Sandwich). Sean f, g, h funciones definidas en $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$.*
Si para todo $x \neq a$ tal que $a - r < x < a + r$ se tiene que:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

y $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ y $x \neq a$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$ o equivalentemente $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$.
Puesto que $\lim_{x\to a} g(x) = L$ para dicho $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - a| < \delta_1$ y $x \neq a$ se tiene que

$$\boxed{L - \epsilon < g(x)} < L + \epsilon$$

Por otra parte, usando que $\lim_{x\to a} h(x) = L$ para dicho $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que si $|x - a| < \delta_2$ y $x \neq a$ se tiene que

$$L - \epsilon < \boxed{h(x) < L + \epsilon}$$

Combinando los dos resultados tenemos que si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y $|x - a| < \delta$ y $x \neq a$ entonces

$$\boxed{L - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \epsilon\ .}$$

□

Consecuencias y casos extremos:
Una de las principales consecuencias del criterio del sancwich es el resultado que afirma que si una función tiene límite cero en un punto y está acotada cerca de dicho punto entonces el producto tiene límite cero. Recordamos las nociones de funciones acotadas.

Definición 26.

1. *Diremos que una función f está acotada superiormente en el conjunto I si existe $M > 0$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in I$, es decir, si el conjunto $A = \{f(x) : x \in I\}$ es un conjunto acotado superiormente.*

2. *Diremos que una función f está acotada inferiormente en el conjunto I si existe $M > 0$ tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in I$, es decir, si el conjunto $A = \{f(x) : x \in I\}$ es un conjunto acotado inferiormente.*

3. *Diremos que una función f está acotada en el conjunto I si está acotada superior e inferiormente en I, es decir, si el conjunto $A = \{f(x) : x \in I\}$ es un conjunto acotado.*

Observación 27. *Una función puede ser acotada en un intervalo pero no en otro; por ejemplo, $f(x) = log(x)$ está acotada en $(2, 3)$ pero no en $(0, 3)$.*

Proposición 28. *Sea $f(x)$ una función tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $g(x)$ una función* **acotada** *en algún intervalo $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$. Entonces:*

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0.$$

Ejemplo 29. *Para calcular $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\ln(x))$. Como $\lim_{x\to 0} x = 0$ y $\operatorname{sen}(\ln(x))$ acotada en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que:*

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\ln(x)) = 0.$$

Proposición 30. *(Casos extremos del criterio del Sandwich.) Sean $f(x), g(x)$ funciones tales que para todo $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) \leq g(x).$$

1. *Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.*

2. *Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$*

Aplicaciones:

Ejemplo 31. *Para calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$$

Nótese que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ no existe (se probará), pero para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$$\frac{1}{x^2} + \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{x^2} - 1$$

por lo tanto, como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = \infty$, por el caso extremo del criterio del sandwich se tiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} + \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = \infty$$

Ejemplo 32. *Para calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} + x - [x]$$

Como $x - [x] \geq 0$ *siempre, se tiene que para todo* $x \neq 0$

$$\frac{1}{x^2} + x - [x] \geq \frac{1}{x^2}$$

y $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = \infty$*, de nuevo se tiene que:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} + x - [x] = \infty$$

Observación 33. *El mismo tipo de resultados se puede obtener para límites laterales, donde las desigualdades entre funciones se consideran sólo para puntos a la derecha o a la izquiera del punto* a *en el que se estudia el límite.*

Corolario 34. *Si* $f(x), g(x)$ *son funciones tales que para todo* $x \in (a - r, a + r) \setminus \{a\}$

$$|f(x)| \leq g(x)$$

y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *entonces* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

1.2.3. Límites infinitos o en el infinito. Asintótas horizontales, verticales y oblícuas.

Definimos a continuación el límite en el infinito:

Definición 35. *Sea* f *definida en* $[r, \infty)$ *para algún* $r \in \mathbb{R}$*. Diremos que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $R > 0$ *tal que para todo* $x > R$ *se tiene que*

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

De forma análoga se define $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.
Interpretación gráfica: Dado $\epsilon > 0$, consideramos la banda horizontal limitada por las rectas $y = L - \epsilon$ y $y = L + \epsilon$; podemos encontrar un $R > 0$ tal que la gráfica de la función en $[R, \infty)$ queda contenida en la banda horizontal.
Recordamos las nociones de asíntotas:

Definición 36.

1. *f tiene en $x = a$ una asíntota horizontal si alguno de los límites laterates de f en a es ∞ o $-\infty$, es decir,* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ *o* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ *para* $L = \infty$ *o* $-\infty$.

2. *$y = L$ es asíntota horizontal de f si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *o* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

3. *Diremos que la recta $y = Ax + B$ (con $A \neq 0$) es una asíntota oblícua de f si*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (Ax + B) = 0 \text{ o } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (Ax + B) = 0$$

Esto ocurre cuando $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = A$ *y* $\lim_{x\to\infty} f(x) - Ax = B$, *y análogamente en $-\infty$.*

1.2.4. Límites y sucesiones.

En lo que sigue vemos un resultado que relaciona el límite de funciones y el límite de sucesiones.

Proposición 37. *Sea f definida en $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$. Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *donde $L \in \mathbb{R}, L = \infty$ o $L = -\infty$, entonces para todo sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *y $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

Este resultado se aplica para justificar que no existen algunos límites de la siguiente forma:

Corolario 38. *Supongamos que existen dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

y $a_n \neq a$ y $b_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sin embargo

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Entonces NO EXISTE $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ejemplo 39. *Ahora podemos probar que no existe* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$. *En efecto, basta considerar las sucesiones: $a_n = \dfrac{1}{n\pi}$ y $b_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}$. Es claro que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi + \pi/2} = 0,$$

y sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n\pi) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(2n\pi + \pi/2) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{b_n}\right).$$

Observación: Es importante destacar que no es lo mismo $\lim_{x\to\infty} f(x)$ que $\lim_{n\to\infty} f(n)$, ya que:

1. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ es un límite de $f(x)$ cuando $x \to \infty$.

2. $\lim_{n\to\infty} f(n)$ es el límite de la sucesión $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Lo que siempre es cierto es el siguiente resultado que permite calcular límites de sucesiones utilizando límites de funciones en el infinito.

Proposición 40. *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} f(n)$.

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Basta considerar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 41. *Sea* $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$. *Es claro que*

$$\lim_{n\to\infty} n\pi = \lim_{n\to\infty} (4n+1)\pi/2 = \infty$$

y sin embargo:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left((4n+1)\pi/2\right)$$

Por lo tanto, no existe $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x)$, *sin embargo* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi n) = 0$-

- Otro ejemplo de esta situación es $\lim_{x\to\infty} x - [x]$.

1.2.5. Infinitésimos equivalentes.

Definición 42. *Diremos que* f *es un infinitésimo en* $x = a$ *(donde* $a \in \mathbb{R}$ *o* $a = \infty$ *o* $a = -\infty$ *si* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. *Diremos que* f *es un infinito en* a *si* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *o* $-\infty$.

Definición 43. *Diremos que dos infinitésimos* $f(x), g(x)$ *o infinitos en* a *son equivalentes, y lo denotamos por* $f(x) \sim g(x)$ *en* $x = a$ *si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Uso de infinitésimos equivalentes: Podemos sustituir un infinitésimo o infinito por otro equivalente en <u>productos</u> y <u>cocientes.</u> pero nunca en sumas, restas o potencias infinitas.

Proposición 44. *Sean* $f(x), g(x)$ *dos infinitésimos o infinitos equivalentes en* $x = a$, *entonces,*

1.
$$\lim_{x\to a} f(x)h(x) = \lim_{x\to a} g(x)h(x)$$

2.
$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}$$

Observación 45. *No se puede sustituir un infinitésimo por otro equivalente en restas o sumas. Por ejemplo. Las funciones $f(x) = xe^{1/x}$ y $g(x) = x$ son infinitos en ∞ y además equivalentes , puesto que*

$$\lim_{x\to\infty} xe^{1/x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = 1.$$

Sin embargo:
$$\lim_{x\to\infty} xe^{1/x} - x \neq 0$$
puesto que el límite anterior presenta una indeterminación de tipo $\infty - \infty$ que se resuelve de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/x^2 e^{1/x}}{-1/x^2} = \infty.$$

Las equivalencias más importantes son:

1. $\mathrm{sen}(x) \sim x$ si $x \to 0$.

2. $\log(1 + x) \sim x$ si $x \to 0$.

1.2.6. Propiedades de acotación local y conservación del signo.

En lo que sigue vemos el impacto del límite de una función en un punto a en el comportamiento de la función en las proximidades de a: signo y acotación.

Proposición 46. *Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ se tiene que:*
$$f(x) > \frac{L}{2} > 0.$$

Demostración. Basta considerar $\epsilon = \dfrac{L}{2} > 0$ y aplicar la definición de límite para encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ se tiene que:
$$|f(x) - L| < \frac{L}{2}$$

Por lo tanto

$$\frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}$$

$\square$

Observación 47. *El mismo tipo de resultado es cierto para* $L < 0$ *es cierto (formularlo y probarlo). Ahora, si sabemos por ejemplo que* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *¿Podemos decir algo acerca del signo de* f *en las proximidades de* a*? Pensar en la función* $f(x) = x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$.

Proposición 48. *(Propiedad de acotación local). Supongamos que* $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$ *entonces existe un* $\delta > 0$ *tal que* f *está acotada en* $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ *para algún* $\delta > 0$.

Demostración. Basta considerar $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$ como antes y aplicar la definición de límite para encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ se tiene que:

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2}$$

Por lo tanto para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ se tiene que

$$\frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2},$$

lo cual significa que f está acotada en dicho intervalo estrellado. $\square$

Capítulo 2

Continuidad

2.1. Funciones continuas.

Sea f definida en $D = Dom(f)$ y sea $a \in D$ un punto interior de D es decir, existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset D$.

Definición 49. *Diremos que f es continua en a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Utilizando la definición $\epsilon - \delta$ del límite: f es continua en a si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

A veces la función sólo está definida a la derecha o la izquierda de un punto y definimos la continuidad lateral de la siguiente forma:

Definición 50. *Sea f definida en $[a - r, a)$ para un cierto $r > 0$. Diremos que f es continua por la derecha en a si*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Definición 51. *Sea f definida en $(a - r, a]$ para un cierto $r > 0$. Diremos que f es continua por la izquierda en a si*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Observación 52. *Una función es continua en un punto si y sólo si es continua por la derecha y por la izquierda en dicho punto.*

2.1.1. Tipos de discontinuidades:

En los casos en los que una función no es continua en un punto a se dice que f es discontinua en a y se clasifican las discontinuidades de la siguiente forma:

- *Discontinuidades evitable:*

Definición 53. *Diremos que f tiene una discontinuidad evitable en a si* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe (es finito) pero no coincide con $f(a)$, es decir,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Se llama discontinuidad evitable porque si consideramos la nueva función redefinida en a dada por $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq a$ y $\tilde{f}(a) = \lim_{x\to a} f(x)$ entonces la nueva función $\tilde{f}$ es continua en a puesto que:

$$\lim_{x\to a} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \tilde{f}(a).$$

- *Discontinuidades de salto:*

Definición 54. *Diremos que f tiene una discontinuidad de salto en a si los límites laterales existen pero no coinciden, es decir,*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

En este caso se dice que el salto de f en a es $|\lim_{x\to a^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)|$.

- *Discontinuidades esenciales:*

Definición 55. *Diremos que f tiene una discontinuidad esencial en a si no existen* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *o* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ *o alguno de ellos es ∞ o $-\infty$.*

2.1.2. Propiedades de las funciones continuas:

Una vez estudiadas las propiedades del límite se deducen de forma natural todas las propiedades de la continidad:

Proposición 56. *Sean f, g definidas en $(a-r, a+r)$ para un cierto $r > 0$. Si f, g son continuas en a entonces $f+g$, fg es continua en a. Además, si $g(a) \neq 0$ se tiene que $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.*

Hay definiciones análogas para la continuidad por la izquierda y por la derecha.
En cuanto a la composición de funciones tenemos que la composición de funciones continuas es una función continua:

Proposición 57. *Sea f definida en $(a-r, a+r)$ para un cierto $r > 0$ y g definida en $(f(a)-s, f(a)+s)$ para algún $s > 0$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$ entonces $g \circ f$ es continua en a.*

En lo que sigue estudiamos los teoremas principales de continuidad de funciones sobre intervalos cerrados y acotados. Diremos que una función f es continua en $[a, b]$ si f es continua en (a, b) y es continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

2.1.3. Teorema de la acotación de las funciones continuas:

Probaremos ahora que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es acotada en dicho intervalo. En primer lugar veremos la siguiente propiedad de acotación local de la función:

Lema 58. *(Propiedad de acotación local de las funciones continuas.) Sea f una función continua en a, entonces existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$.*

Demostración. Puesto que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ utilizando la definición de límite, para $\epsilon = 1$, por ejemplo, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(a)| < 1 \Leftrightarrow f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1,$$

con lo cual f está acotada en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$.

□

Utilizando la continuidad lateral obtenemos que:

Proposición 59.

1. *Si f es continua por la derecha en a, existe un $r > 0$ tal que f está acotada en $[a, a+r)$.*
2. *Si f es continua por la izquierda en a, existe un $r > 0$ tal que f está acotada en $(a-r, a]$.*

Para probar el teorema de acotación usaremos las siguientes propiedades elementales de las funciones acotadas:

Lema 60. *Sea f definida en los conjuntos I y J,*

1. *Si f está acotada en I y f está acotada en J entonces f está acotada en $I \cup J$.*

2. *Si f está acotada en I y $J \subset I$ entonces f está acotada en J.*

Teorema 61. *Sea f una función continua en $[a, b]$ entonces f está acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Razonamos por red. al absurdo. Supongamos que f no está acotada en $[a, b]$. Entonces:
Dividimos el intervalo $[a, b]$ en dos subintervalos de igual longitud $[a, \frac{a+b}{2}], [\frac{a+b}{2}, b]$. Si f no está acotada en $[a, b]$ entonces f no está acotada en alguno de los dos intervalos. LLamemos $I_1 = [a_1, b_1]$ a uno de los dos intervalos donde f no está acotada. Así:
f no está acotada en $I_1 = [a_1, b_1] \subset [a, b]$ y $long(I_1) = \frac{b-a}{2}$.
Seguimos el mismo proceso, dividimos el intervalo I_1 en dos subintervalos de igual longitud y elegimos y llamamos I_2 a uno de ellos donde la función no está acotada.
Siguiendo este proceso construímos una sucesión de intervalos encajados $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de modo que:
• $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
• $long(I_n) = \frac{b-a}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
• f no está acotada en I_n para todo $n \in \mathbb{N}$.
En estas circunstancias llegamos a una contradicción. En efecto, por la propiedad de los intervalos encajados como $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ existe un único $c \in [a, b]$ tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se pueden presentar tres casos:

1. $c \in (a, b)$ es un punto interior del intervalo. En este caso por la propiedad de acotación local existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(c - \delta, c + \delta)$. Ahora bien, para N suficientemente grande tenemos que

$$I_N \subset (c - \delta, c + \delta)$$

   en efecto, puesto que $c \in I_N$ basta elegir N tal que $long(I_N) < \delta$ lo cual es posible puesto que $\lim_{n\to\infty} long(I_n) = 0$.

   Por lo tanto f acotada en $(c - \delta, c + \delta)$ pero f no está acotada en un conjunto más pequeño I_M, ESTO NO ES POSIBLE y llegamos a una CONTRADICCIÓN.

2. $c = a$ se razona de forma análoga al caso anterior pero con la continuidad por la derecha de la función en a y la acotación local a la derecha de a, llegando a CONTRADICCIÓN.

3. $c = b$ se razona de forma análoga al caso anterior pero con la continuiudad por la izquierda de la función en b y la acotación local de f a la izquierda de b, llegando a CONTRADICCIÓN.

$\square$

2.1.4. Teorema de Weierstrass de las funciones cotinuas.

Definición 62. *Sea f definida en un conjunto I.*

1. *Diremos que a es un punto de máximo absoluto de f en I si para todo $x \in I$ se tiene que:*
$$f(x) \leq f(a).$$
En este caso $f(a)$ es el valor máximo de f en I.

2. *Diremos que a es un punto de mínimo absoluto de f en I si para todo $x \in I$ se tiene que:*
$$f(x) \geq f(a).$$
En este caso $f(a)$ es el valor mínimo de f en I.

Teorema 63. (Teorema de Weierstrass) *Sea f una funcíón continua en $[a, b]$ entonces f alcanza máximo y mínimo absoluto en $[a, b]$.*

Demostración. Hacemos la prueba para obtener el máximo absoluto; en el caso del mínimo absoluto la prueba es análoga.
Tenemos que encontrar $c \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in [a, b]$. En primer lugar, si f es continua en $[a, b]$ utilizando el teorema de acotación obtenemos que f es acotada en $[a, b]$; por tanto el conjunto $A = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ está acotado y por la propiedad del supremo existe

$$\alpha = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = \sup(A).$$

Vamos a probar que dicho supremo es un máximo, es decir, que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \alpha$ y entonces f alcanza el máximo absoluto en el punto c.
Por definición de supremo,
• Puesto que $\alpha - 1 < \alpha$ se sigue que $\alpha - 1$ no es cota superior de A y por tanto existe $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) > \alpha - 1$.

De la misma forma, para todo $n \in \mathbb{N}$,
• Puesto que $\alpha - \frac{1}{n} < \alpha$ se sigue que $\alpha - \frac{1}{n}$ no es cota superior de A y por tanto existe $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > \alpha - \frac{1}{n}$.
Construímos de esta forma una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[a, b]$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \alpha.$$

Como consecuencia del criterio del Sandwich se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.
Por otra parte, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada con $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto tiene una subsucesión convergente a un punto $c \in [a, b]$ por los resultados de sucesiones. Sea $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dicha subsucesión. Ahora:
• Como f es continua en c y $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ se tiene que $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.
• Por otra parte, como $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ y $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ es subsucesión de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene que $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \alpha$.
Por lo tanto, $f(c) = \alpha$. Así, como $c \in [a, b]$ y $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in [a, b]$ se tiene que c es un máximo absoluto de f en $[a, b]$.

$\square$

Hay otra demostración del teorema de Weierstrass que no requiere la utilización de sucesiones e incluímos a continuación:

Demostración. Haremos la demostración para el máximo absoluto y de foma análoga se prueba para el mínimo.
Razonaremos por red. al absurdo. Supongamos que no existe un punto de máximo absoluto de f en $[a, b]$. Consideramos el conjunto $A = \{f(x), x \in [a, b]\}$. Por el teorema de acotación este conjunto es acotado y por tanto existe el supremo de A que llamaremos α. Sea la función auxiliar:

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}$$

Es claro que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in [a, b]$ y en particular, $\alpha - f(x) > 0$. Puesto que f no alcanza máximo se tiene que $\alpha \neq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, por lo tanto g es continua en $[a, b]$ y aplicando de nuevo el teorema de acotación tenemos que existe $K > 0$ tal que para todo $x \in [a, b]$

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)} \leq K \Leftrightarrow \frac{1}{K} \leq \alpha - f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq \alpha - \frac{1}{K}.$$

Esto significa que $\alpha - \dfrac{1}{K}$ es cota superior del conjunto A lo cual NO ES POSIBLE puesto que α es es supremo de dicho conjunto y por lo tanto es la mínima cota superior del mismo.

□

2.1.5. Teorema de Bolzano. Teorema de Barboux o de los valores intermedios.

Para la prueba del teorema de Bolzano es esencial la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas.

Corolario 64. *(Propiedad de conservación del signo.) Sea f continua en a y $f(a) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$ se tiene que $f(x) > 0$.*

Demostración. Por la definición de límite, puesto que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) > 0$ se tiene que para $\epsilon = \dfrac{f(a)}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ se tiene que

$$f(a) - \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \frac{f(a)}{2}.$$

En particular se tiene que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$ y como $f(a) > 0$ entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$. □

De forma análoga, considerando los límites laterales se tiene que:

Corolario 65.

1. *Si f es continua por la derecha en a y $f(a) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, a+\delta)$.*

2. *Si f es continua por la izquierda en a y $f(a) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a-\delta, a]$.*

Teorema 66. TEOREMA DE BOLZANO. *Sea f una función continua en $[a, b]$. Si $f(a)f(b) < 0$ entonces existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Utilizaremos el método de la bisección que además nos servirá para localizar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

Método de la bisección: Dividimos el intervalo $[a, b]$ en dos subintervalos de igual longitud $[a, c_0], [c_0, b]$ con $c_0 = \frac{a+b}{2}$. Si

$$f(c_0) = 0$$

ya hemos acabado la demostración. En otro caso, llamaremos $I_1 = [a_1, b_1]$ al intervalo de entre los dos intervalos $[a, c_0], [c_0, b]$ que verifica que $f(a_1)f(b_1) < 0$. Nótese que $long(I_1) = \frac{b-a}{2}$.
Seguimos el proceso: consideramos el intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$ y lo dividimos en dos subintervalos de igual longitud $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ con $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Si

$$f(c_1) = 0$$

ya hemos acabado la demostración. En otro caso, llamaremos escogemos el intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$ de modo que $f(a_2)f(b_2) < 0$.
Si seguimos el proceso, o bien en algún paso de la prueba encontramos $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = 0$$

En otro caso, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados y acotados y encajados $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de modo que:
- $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $long(I_n) = \frac{b-a}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $f(a_n)f(b_n) < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por la propiedad de los intervalos encajados existe $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $f(c) = 0$.
Razonamos por red. al absurdo, supongamos que $f(c) \neq 0$. Consideramos primero el caso $f(c) > 0$; en el otro caso se razona de forma análoga.
Se pueden presentar tres casos:

1. c pertenece al intervalo abierto (a, b). En este caso, como f es continua en c por la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Ahora, como como $\lim_{n\to\infty} long(I_n) = 0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que $long(I_{n_0}) < \frac{r}{2}$ y $c \in I_n$ luego $I_n \subset (c - \delta, c + \delta)$ y por tanto $f(x) > 0$ para todo $x \in I_n = [a_n, b_n]$. Esto NO ES POSIBLE ya que $f(a_n)f(b_n) < 0$, luego llegamos a CONTRADICCIÓN.

2. si $c = a$ se razona de la misma forma con la continuidad por la derecha de f en a y se llega a CONTRADICCIÓN.

3. si $c = b$ se razona de la misma forma con la continuidad por la izquierda de f en a y se llega a CONTRADICCIÓN.

$\square$

Teorema 67. *Teorema de Darboux o de los valores intermedios.*
Sea f una función continua en $[a,b]$ y $f(a) < d < f(b)$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Demostración. Consideramos la función auxiliar g definida en $[a,b]$ de la siguiente forma:

$$g(x) = f(x) - d$$

Es claro que g es continua en $[a,b]$, puesto que f lo es, y como $g(a) < 0$ y $g(b) > 0$ entonces utilizando el teorema de Bolzano tenemos que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - d = 0 \Leftrightarrow f(c) = d.$$

con lo cual queda probado. □

Aplicaciones del teorema de Bolzano:
• *Existencia y localización de raíces de una ecuación $f(x) = 0$.*
Probaremos que la ecuación $x^3 + 2x + 1 = 0$ tiene una solución en $\mathbb{R}$ y obtendremos una aproximación de la misma con error menor que $0,3$. Consideramos la función $f(x) = x^3 + 2x + 1 = 0$. Es claro que $f(-1) < 0$ y $f(0) > 0$ con lo cual aplicando el teorema de Bolzano a $f(x)$ que es continua podemos asegurar que existe una raíz del polinomio en $[-1,0]$. Utilizamos el método de bisección: puesto que $f(\frac{-1}{2}) < 0$ por el mismo argumento hay una raíz en $[\frac{-1}{2}, 0]$. Calculamos $f(\frac{-1}{4}) > 0$ con lo cual hay una raíz en $[-0,25, -0,5]$ con lo cual el valor aproximado de la raíz con error menor que $0,3$ es $-0,25$.

• *Obtención de un valor aproximado de $\sqrt{2}$.*
$\sqrt{2}$ es la solución positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Para obtener un valor aproximado mediante el método de la bisección, consideramos la función continua $f(x) = x^2 - 2$ y utilizamos el método comenzando con el intervalo $[1,2]$:
• Como $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$ consideramos el punto medio $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$, puesto que $f(\frac{3}{2}) > 0$ elegimos el invervalo $[1, \frac{3}{2}]$.
• Consideramos el punto medio $\frac{1+3/2}{2} = 5/4$, puesto que $f(5/4) < 0$ elegimos el invervalo $[5/4, 3/2]$.
• Consideramos el punto medio $\frac{5/4+3/2}{2} = 11/8$, puesto que $f(11/8) < 0$ elegimos el intervalo $[11/8, 3/2]$.
• Consideramos el punto medio $\frac{11/8+3/2}{2} = 23/16$, puesto que $f(23/16) > 0$ consideramos el intervalo $[11/8, 23/16]$.
• Consideramos el punto medio $\frac{11/8+23/16}{2} = 45/32$, puesto que $f(45/32) < 0$ consideramos el intervalo $[45/32, 23/16]$.

Podemos seguir el proceso: hasta este punto tendremos que

$$1,40625 = 45/32 < \sqrt{2} < 23/16 = 1,4375,$$

con lo cual $\sqrt{2} \sim 1,4$ con un error menor que $0,1$.

2.1.6. Teoremas del punto fijo

Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$. Los teoremas del punto fijo constituyen una fuente de aplicaciones del cálculo en muchos problemas. Vemos un primer teorema de punto fijo que es una consecuencia del teorema de Bolzano:

Proposición 68. *(Teorema del punto fijo) Sea* $f : [0,1] \to [0,1]$ *una función continua en* $[0,1]$*. Entonces* f *tiene al menos un punto fijo, es decir existe* $c \in [0,1]$ *tal que*

$$\boxed{f(c) = c.}$$

Demostración. En primer lugar tenemos en cuenta que los puntos fijos de f son ceros de la función $g(x) = f(x) - x$. Puesto que g es una función continua en $[0,1]$, por serlo f, se pueden presentar los siguientes casos:

1. si $f(0) = 0$ ya hemos acabado:0 es punto fijo de f.

2. si $f(1) = 1$ ya hemos acabado: 1 es punto fijo de f.

3. En otro caso, como $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, se tiene que: $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$ entonces $g(0) > 0$ y $g(1) < 0$, y aplicando el teorema de Bolzano a f en $[0,1]$ se tiene que existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$ y por lo tanto $f(c) = c$, y c es punto fijo de f.

□

Capítulo 3

La derivada

Definición 69. *Sea f definida en un intervalo abierto centrado en a, $(a-r, a+r)$ para algún $r > 0$. Diremos que f es derivable en el punto a si el siguiente límite existe,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}.$$

Al número $f'(a)$ le llamaremos derivada de f en el punto a.

Interpretación geométrica: $f'(a)$ es el límite de las pendientes de las cuerdas o rectas secantes que unen los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$. De esta forma la gráfica de la función tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$.

Definición 70. *Si una función es derivable en a se define la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$ como la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$, siendo la ecuación de dicha recta:*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Caso de tangente vertical: En el caso de que la función f sea continua en a y

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty, \qquad \text{o} - \infty$$

la función f no es derivable en $x = a$. Sin embargo, en este caso la recta $x = a$ es la tangente vertical a la gráfica en el punto $(a, f(a))$.

En algunas ocasiones la función está definida de distinta forma a la derecha o izquierda, o sólo está definida a la derecha o la izquierda y hablamos de derivadas laterales:

Definición 71. *La derivada por la derecha de f en a que denotaremos por $f'(a^+)$ es el valor del siguiente límite, siempre y cuando exista:*

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

De la misma forma:

Definición 72. *La derivada por la izquierda de f en a que denotaremos por $f'(a^-)$ es el valor del siguiente límite, siempre y cuando exista:*

$$f'(a^-) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Se tiene el siguiente resultado que resulta muy útil cuando la función está definida de distinta forma a la derecha e izquierda del punto a estudiar :

Proposición 73. *La función f es derivable en a si y sólo si*

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^-)$$

Ejemplos de funciones que no son derivables en un punto a

1. La gráfica de la función $f(x) = |x-5|$ tiene un pico en el punto 5; se puede comprobar que f no es derivable en dicho punto ya que:

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^+} \frac{|x-5|}{x-5} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 5^-} \frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$$

   De hecho, siempre que existan los límites laterales, pero no coincidan, es decir

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \neq \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

   la función no será derivable en a y tendrá un pico en a o punto anguloso.

2. La función $f(x) = |x|^{1/2}$ verifica que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^{1/2}}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^{1/2}}{-|x|} = -\infty$$

   y por tanto no es derivable en 0, ni tiene tangente vertical.

Aproximación: Si f es derivable en a podemos aproximar la gráfica de la función por la recta tangente a f en $(a, f(a))$ en las proximidades de a.

Teorema 74. *Sea f una función derivable en el punto a. Entonces f es continua en a.*

Demostración. Supongamos que f es derivable en el punto a, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = 0$$

y por lo tanto $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\square$

3.1. Función derivada.

Si f es derivable en un intervalo abierto I, la función derivada f' es la función que asigna a cada punto $x \in I$ el valor de la derivada de f en x, es decir: $f' : x \to f'(x)$.

El siguiente resultado es útil en algunas ocasiones cuando la función está definida de distinta forma a ambos lados de un cierto punto:

Proposición 75. *Sea f una función definida en $(a-r, a+r)$ para algún $r > 0$ y derivable en $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$ y tal que*

1. *f es continua en $x = a$.*
2. *Los límites $\lim_{x\to a^+} f'(x), \lim_{x\to a^-} f'(x)$ existen o son ∞ o $-\infty$.*

Entonces, son equivalentes

1. *f es derivable en a.*
2. $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x) \in \mathbb{R}$.

Además en este caso, $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$.

Observación: Para utilizar el resultado anterior hay que asegurarse de que los límites $\lim_{x\to a^+} f'(x), \lim_{x\to a^-} f'(x)$ existen o son ∞ o $-\infty$, puesto que si no el resultado no es cierto. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es derivable en 0 puesto que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$$

ya que $lim_{x\to 0} x = 0$ y $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ es una función acotada. Sin embargo,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 2x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}),$$

no existe. Nótese que la condición $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$ significa que la función derivada es continua en a lo cual es una condición más restrictiva que ser derivable en a.

3.1.1. Propiedades de las funciones derivables:

Proposición 76. *Sean f, g definidas en $(a-r, a+r)$ para un cierto $r>0$. Si f, g son derivables en a entonces $f+g$, fg es continua en a. Además, si $g(a) \neq 0$ se tiene que $\frac{f}{g}$ es continua en a. Además,*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. *Si* $g(a) \neq 0$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

En cuanto a la composición de funciones tenemos que la composición de funciones derivables son derivables:

Proposición 77. *(Regla de la cadena) Sea f definida en $(a-r, a+r)$ para un cierto $r>0$ y g definida en $(f(a)-s, f(a)+s)$ para algún $s>0$. Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$ entonces $g \circ f$ es derivable en a y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

3.2. Derivada de la función inversa.

Sea $f : [a,b] \to [c,d]$ una función inyectiva y sobreyectiva. Entonces, existe la función inversa $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ verificando que para todo $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Continuidad de la función inversa. Sea $f : [a,b] \to [c,d]$ una función biyetiva y continua en $[a,b]$. Entonces la función inversa $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ es continua.

Derivabilidad de la función inversa. Sea $f : [a,b] \to [c,d]$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, Entonces,

1. f es inyectiva en $[a,b]$.
2. f es sobreyectiva sobre el intervalo $[m, M]$ siendo $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ y $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

3. La función inversa $f^{-1} : [m, M] \to [a, b]$ es derivable en (m, M) y además se tiene que si $x \in (a, b)$:
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

3.3. Extremos relativos. Condición necesaria.

Definimos en primer lugar los máximos y mínimos relativos de una función:

Definición 78. Sea f una función definida en el intervalo (a, b) y $c \in (a, b)$. Diremos que

i) c es *máximo relativo* de f si existe $r > 0$ tal que
$$f(x) \leq f(c) \quad \text{para todo } x \in (c - r, c + r).$$

ii) c es *mínimo relativo* de f si existe $r > 0$ tal que
$$f(x) \geq f(c) \quad \text{para todo } x \in (c - r, c + r).$$

iii) c es un *extremo relativo* de f si c es un máximo o mínimo relativo de f.

Gráficamente se observa que, en el caso de funciones derivables, los puntos de máximo o mínimo relativos son aquéllos en los que la recta tangente a la gráfica es horizontal, o lo que es lo mismo, la derivada de f en dichos puntos es nula. A continuación probamos este resultado.

Teorema 79. *Sea f una función derivable en el intervalo (a, b). Si $c \in (a, b)$ es un extremo (máximo o mínimo) relativo de f entonces:*
$$\boxed{f'(c) = 0}$$

Demostración. Supongamos que c es un punto de máximo relativo de f, entonces hay un $r > 0$ tal que
$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para todo } x \in (c - r, c + r).$$
Observamos el signo de los cocientes $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$, y tenemos que
• Si $x \in (c - r, c)$, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$, por lo tanto pasando al límite, que sabemos que existe, cuando $x \to c^-$ tenemos que
$$f'('c) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

• Si $x \in (c, c+r)$, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, por lo tanto pasando al límite, que sabemos que existe, cuando $x \to c^+$ tenemos que

$$f'(c) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$

Así, $0 \leq f'(c) \leq 0$ y $f'(c) = 0$. $\square$

Corolario 80. *Sea f una función derivable en el intervalo (a, b). Si $c \in (a, b)$ es un extremo (máximo o mínimo) relativo de f entonces la recta tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c))$ es horizontal, es decir, es la recta $y = f(c)$.*

Observación 81. La condición anterior es una condición necesaria para que un punto sea un extremo de una función derivable en dicho punto pero no es suficiente. En efecto, basta considerar el ejemplo $f(x) = x^3$. Claramente el punto $x = 0$ no es un extremo relativo de f puesto que $f(x) < f(0)$ si $x < 0$ y $f(x) > 0$ si $x > 0$. Sin embargo, $f'(0) = 0$.

Observación 82. Una función puede no ser derivable en un punto y tener un extremo relativo en dicho punto. Basta considerar la función $f(x) = |x|$. Claramente el punto $x = 0$ es un punto de mínimo relativo de f puesto que $f(x) = |x| \geq 0 = f(0)$.

Observación 83. *Relación entre extremos relativos y absolutos.* Sea f una función definida en $[a, b]$. Supongamos que c es un máximo o mínimo absoluto de f en $[a, b]$. Entonces:

• Si $c \in (a, b)$, entonces c es un extremo relativo de f. En efecto, supongamos que c es un máximo absoluto de f en (a, b). Elegímos r suficientemente pequeño para que $(c-r, c+r) \subset [a, b]$, basta elegir $r = \min\{c-a, b-a\}$. Puesto que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in [a, b]$, en particular, $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in (c-r, c+r)$ y por lo tanto c es un máximo relativo de f.

• Si $c = a$ o $c = b$, puede ocurrir que c no sea extremo relativo. Por ejemplo, si consideramos $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$ es claro que $x = 0$ y $x = 1$ son el mínimo y máximo absoluto de f en $[0, 1]$, sin embargo ninguno de los dos es extremo relativo de la función f.

3.4. Teorema del Valor Medio y aplicaciones

En este tema vamos a tratar el teorema del valor medio que relaciona una función con la función derivada.

Probaremos en primer lugar el teorema de Rolle, que afirma que si una función continua en un intervalo cerrado y acotado y derivable en el intervalo abierto es cero en los extremos entonces existe algún punto en el interior del intervalo donde la recta tangente de f en dicho punto es horizontal, o lo que es lo mismo, la derivada en dicho punto es cero. Gráficamente se observa que dicho punto será donde la función alcance el máximo o el mínimo absoluto.

Teorema 84. Teorema de Rolle: *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. En el caso de que la función sea $f(x) = f(a) = f(b)$ para todo $x \in [a, b]$ se tiene que $f'(x) = 0$ con lo cual el resultado es cierto. En otro caso, existe $d \in (a, b)$ tal que $f(x) \neq f(a)$. Supongamos que $f(d) > f(a) = f(b)$ (en otro caso la prueba es análoga). Entonces, como $f(x)$ es continua en $[a, b]$ por el teorema de máximos de Weierstrasss existe el máximo absoluto de $f(x)$ en $[a, b]$, llamémosle c. Como $c \in (a, b)$ dicho punto es un máximo relativo y por lo tanto $f'(c) = 0$.

□

A partir de este resultado probaremos el teorema del Valor Medio:

Teorema 85. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Vamos a buscar una función $g(x)$ que se anule en los extremos del intervalo $[a, b]$ de modo que al aplicar el teorema de Rolle se obtenga la conclusión. Consideramos la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ que tiene por ecuación $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Se observa gráficamente que si consideramos la función diferencia de $f(x)$ con dicha recta, el punto (o puntos) que buscamos son aquéllos donde la función diferencia se maximiza o minimiza. Veámoslo analíticamente. Consideramos la función

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$$

Dicha función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), puesto que $f(x)$ lo es. Además, $g(a) = g(b) = 0$. Por lo tanto, aplicando el teorema de Rolle tenemos que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, por lo tanto:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \qquad \text{y } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

3.4.1. Aplicaciones del Teorema del Valor Medio

Unicidad de raíces de una ecuación en un intervalo. El teorema de Bolzano afirma que si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $f(a)f(b)<0$ entonces existe al menos un $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$. Mediante la utilización del teorema de Rolle, si $f'(x)\neq 0$ para $x\in(a,b)$ se obtiene la unicidad de dicha raíz en el intervalo (a,b). En efecto, en otro caso, si $c<d$ son tales que $f(c)=f(d)=0$ entonces existe $\alpha\in(c,d)$ tal que $f'(c)=0$ y esto no es posible.

Ejemplo 86.

1. La ecuación $x^5+2x+1=0$ tiene una única raiz real. En efecto, consideramos la función $f(x)=x^5+2x+1$. Puesto que $f(-2)<0$ y $f(0)>0$ y $f(x)$ es continua en $[-2,0]$ hay un $c\in(-2,0)$ tal que $f(c)=0$. Además como $f'(x)=5x^4+2>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, dicho c es único.

2. La ecuación $x^4-9x-1=0$ tiene exactamente dos raíces reales distintas. Consideramos la función continua $f(x)=x^4-9x-1$. Como $f(-2)>0$ y $f(0)<0$ hay al menos un $c\in(-2,0)$ tal que $f(c)=0$; de la misma forma, como $f(4)>0$ existe al menos un $d\in(0,4)$ tal que $f(d)=0$. Luego la ecuación tiene al menos dos raíces reales distintas. Si tuviese más de dos raíces reales distintas, $a_1<a_2<a_3$ aplcando el teorema de Rolle a $f(x)$ en $[a_1,a_2]$ y $[a_2,a_3]$ obtendríamos dos números $b_1<b_2$ tal que $f'(b_1)=f'(b_2)=0$. Esto no es posible ya que $f'(x)=4x^3-9=0$ si y sólo si $x=(\frac{9}{4})^{1/3}$.

Desigualdades: El teorema del valor medio nos permite obtener desigualdades interesantes en el caso de que la función derivada esté acotada.

Lema 87. *Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $|f'(x)|\leq M$ para todo $x\in[a,b]$ entonces para todo $x,y\in[a,b]$*

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|.$$

Demostración. Sean $x,y\in[a,b]$, suponemos $x<y$, como f contina en $[x,y]$ y derivable en (x,y), aplicando el teorema del valor medio existe $c_x\in[x,y]$ tal que

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c_x)||x-y|\leq M|x-y|.$$

□

Ejemplo 88. 1. Demostrar que para todo $x, \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|.$$

Basta aplicar el resultado anterior a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en cualquier intervalo $[0, x]$ y tener en cuenta que $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Probar que $e^x \geq x + 1$ para todo $x > 0$. Aplicamos el teorema del valor medio a $f(x) = e^x$ en cualquier intervalo $[0, x]$ con $x > 0$. Entonces, existe $t \in (0, x)$ tal que

$$e^x - 1 = e^t x > x.$$

3.4.2. Crecimiento y decrecimiento.

En esta sección estudiaremos el crecimiento y decrecimiento de una función y cómo determinarlo por medio de la derivada.

Definición 89. Diremos que una funcíón f es

i) *creciente* (resp. *estrictamente creciente*) en un intervalo I si para cualquier $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que

$$f(x) \leq f(y) \quad (resp. \quad f(x) < f(y)).$$

ii) *decreciente* (resp. *estrictamente decreciente*) en un intervalo I si para cualquier $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que

$$f(x) \geq f(y) \quad (resp. \quad f(x) > f(y)).$$

Como aplicación del teorema del valor medio podemos obtener intervalos de crecimiento y decremiento de una función en el caso de que sea derivable mediante el estudio del signo de la derivada.

Teorema 90. *Sea $f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto I:*

i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x)$ es estrictamente creciente en I.

ii) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x)$ es estrictamente decreciente en I.

iii) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x)$ es constante en I.

Demostración. Sean $x, y \in I$ con $x < y$, puesto que f continua en $[x, y]$ y derivable en (x, y) podemos aplicar el teorema del Valor Medio y existe $t \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(t)(y - x)$$

con lo cual:
i) En el caso de que $f'(t) > 0$ para todo $t \in I$ se tendría que $f(y) - f(x) > 0$ con lo cual $f(x) < f(y)$; por lo tanto f es estrictamente creciente en I.
ii) En el caso de que $f'(t) > 0$ para todo $t \in I$ se tendría que $f(y) - f(x) < 0$ con lo cual $f(y) > f(x)$; por lo tanto f es estrictamente decreciente en I.
Para probar *iii*), elegimos $a < x \in I$, aplicando el teorema de Rolle a f en $[a, x]$ tenemos que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$f(x) - f(a) = f'(t)(x - a) = 0$$

con lo cual $f(x) = f(a)$ para todo $x \in I$, y por lo tanto f es constante en I.

$\square$

Observación 91. En particular, si $f(x), g(x)$ son funciones derivables en (a, b) y $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f - g$ es constante en (a, b). En efecto, puesto que $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, aplicando el resultado anterior se obtiene que $f - g$ es constante en I.

3.4.3. La regla de L'Hopital

Otra de las aplicaciones del Teorema del Valor Medio es la regla de L´Hopital. Para la demostración se usa el Teorema del Valor Medio de Cauchy.

Teorema 92. (Teorema del Valor Medio de Cauchy) *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f, g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Teorema 93. (Regla de L'Hopital) *Sean f, g funciones derivables en $(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$ y tal que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

con $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Observación 94. El resultado también es cierto en el caso $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ o $-\infty$ o cuando $a = \infty$ o $-\infty$, o se trata de límites laterales.

3.5. La derivada segunda. Aplicaciones.

Sea $f(x)$ una función derivable en $I = (a, b)$ y consideremos la función $f'(x)$, si la función $f'(x)$ es derivable en a se dice que $f(x)$ es dos veces derivable en a. A la derivada de $f'(x)$ en a se la llama derivada segunda de f en a se denota por $f''(a)$.
Una función es dos veces derivable en $I = (a, b)$ si la función $f'(x)$ es derivable en I. La derivada segunda de una función tiene una aplicación muy importante para la determinación de extremos locales o relativos.

Teorema 95. *(El criterio de la derivada segunda para clasificación de extremos locales) Sea $f(x)$ una función dos veces derivable en el intervalo $I = (a, b)$. Sea $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, entonces:*

i) Si $f''(c) > 0$ el punto c es un mínimo relativo de $f(x)$.

ii) Si $f''(c) < 0$ el punto c es un máximo relativo de $f(x)$.

iii) Si $f''(c) = 0$, el criterio no decide.

Demostración. Supongamos que $f''(c) > 0$. Como

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{x - c} > 0,$$

podemos encontrar $r > 0$ tal que $\dfrac{f'(x)}{x - c} > 0$ si $x \in (c - r, c + r)$, entonces:
• si $x \in (c - r, c)$ se tiene que $f'(x) < 0$, por lo tanto, $f(x)$ es decreciente en $(c - r, c]$.
• si $x \in (c, c + r)$ se tiene que $f'(x) > 0$, por lo tanto $f(x)$ es creciente en $[c, c + r)$.
luego si $x \in (c-r, c+r)$ se tiene que $f(x) \leq f(c)$ y por lo tanto c es un punto de mínimo relativo de $f(x)$.
La demostración en el caso de que $f''(c) > 0$ es análoga. □

3.5.1. Concavidad y convexidad.(*)

Definición 96. Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo (a, b). Diremos que $f(x)$ es *convexa* en el intervalo (a, b) si para todo $x, y \in (a, b)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

De forma análoga, diremos que $f(x)$ es *cóncava* en el intervalo (a, b) si para todo $x, y \in (a, b)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Gráficamente, la convexidad significa que dados dos puntos x, y la gráfica de la función queda por debajo de la recta que une los puntos la gráfica $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.

Teorema 97. *Sea $f(x)$ una función dos veces derivable en un intervalo abierto I.*

1. *Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ es convexa en (a, b).*

2. *Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ es cóncava en (a, b).*

Definición 98. Un punto $c \in (a, b)$ es un *punto de inflexión* de $f(x)$ si existe $r > 0$ tal que $f(x)$ es convexa (resp. cóncava) en $(c - r, c)$ y cóncava (resp. convexa) en $(c, c + r)$.

Lema 99. *Si $f(x)$ es dos veces derivable en (a, b) y c es un punto de inflexión de $f(x)$ entonces $f''(c) = 0$.*

Observación 100. No es cierto, en general, que si $f''(c) = 0$ el punto c sea un punto de inflexión. Basta considerar la función $f(x) = x^4$ que es convexa en todo $\mathbb{R}$ y sin embargo $f''(0) = 0$.

3.6. El Teorema de Taylor. Aplicaciones.

De la misma forma que se define la derivada segunda se pueden definir las derivadas n-ésimas para cualquier $n \geq 2$. Denotamos por $f^{(n)}(x)$ a la derivada n-ésima de f en I.

Definición 101. *Diremos que una función es de clase $\mathcal{C}^{(n)}$ en (a, b) si f es n-veces derivable en el intervalo (a, b) y $f^{(n)}$ es continua en (a, b). Diremos que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en (a, b) si f es de clase $\mathcal{C}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 102. *Las funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en su dominio. Hay otras funciones como la función $f(x) = x^{5/3}$ que no son de dicha clase; de hecho, dicha función es continua y derivable y puesto que $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$ y como f' no es derivable en 0 se tiene que la función f es $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$ pero no es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}$.*

Supongamos que f es una función definida en un intervalo abierto I y que f es n-veces derivable en un punto $a \in I$, el polinomio de Taylor de f en a de grado n se define como:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Se puede observar que para $n = 1$ el polinomio de grado 1 es la función afín $P_{1,a} = f(a) + f'(a)(x-a)$ cuya representación gráfica es la recta tangente a la gráfica de f en a.

A continuación vemos el teorema de Taylor:

Teorema 103. (Teorema de Taylor) *Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo abierto I y sean $a, x \in I$, entonces existe c en el segmento que une a con x de modo que:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Demostración. Fijamos $x = b \in I$ y por comodidad suponemos $a < b$. Tenemos que probar que

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Para probar este teorema se utiliza el teorema del Valor Medio de Cauchy aplicado a las siguientes funciones auxiliares:

$$g(x) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n$$

$$h(x) = (x-b)^{n+1}.$$

Puesto que f es $n+1$-veces derivable en I las funciones $g(x)$ y $h(x)$ son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces podemos utilizar el teorema del Valor Medio de Cauchy y podemos asegurar que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(g(b) - g(a))h'(c) = (h(b) - h(a))g'(c).$$

Por la forma de elegir las funciones tenemos que:

$$g(b) = f(b).$$

$$g(a) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = P_{n,a}(b)$$

$$h(b) = 0.$$

$$h(a) = (b-a)^{n+1}.$$

Por otra parte, derivando la función $h(x)$ obtenemos :

$$h'(x) = f'(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)(b-x)^2 - \frac{1}{2}f''(x)(b-x)^2 + \frac{1}{2}f'''(x)(b-x)^2 - \dots$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(b-x)^n$$

$$g'(x) = -(n+1)(b-x)^n$$

Sustituyendo en la fórmula anterior:

$$(f(b) - P_{n,a}(b))(-(n+1)(c-b)^n) = -(b-a)^{n+1}\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)(c-b)^n$$

y por lo tanto:

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

□

3.6.1. Aplicaciones.

La principal aplicación del teorema de Taylor es la aproximación; nótese que el teorema de Taylor aplicado a una cierta función en las cercanías de un cierto punto a mide el error que cometemos al elegir el valor del polinomio de Taylor de f en a evalúado en $x = b$ en lugar del valor de f en b, para valores b cercanos a a. En efecto, nótese que si la función $f^{(n+1)}$ es continua entonces está localmente acotada y podemos acotar el resto de Taylor mediante

$$|R_{n,a}(c)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(c)|\frac{(b-a)^n}{(n+1)!}.$$

En particular, si b está próximo a a y n es suficientemente grande el valor del error lo podemos acotar y hacer tan pequeño como queramos. Veamos un ejemplo.

Obtener un valor aproximado del número e con un error menor que $0,001$. Consideremos la función $f(x) = e^x$, para esta función tenemos que $f^{(n)}(x) = e^x$ para toto $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto el polinomio de Taylor de orden n de la función en el punto $x = 0$ es:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Por lo tanto aplicando el Teorema de Taylor a la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0,1]$ tenemos que:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \text{ERROR}[n].$$

Donde el resto o error es:

$$|\text{ERROR}[n]| = |\frac{1}{(n+1)!}e^c|$$

Puesto que $c < 0$ se tiene que $e^c < e < 3$ y por tanto:

$$|\text{ERROR}[n]| = |\frac{3}{(n+1)!}|$$

Por tanto si elegirmos $n = 6$ tenemos que $\frac{3}{7!} < 0,001$ y por lo tanto eligiendo el polinomio de Taylor de grado 6 tenemos que:

$$P_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{6!} = 2,7250$$

Luego

$$e \sim 2,7250$$

da una aproximación del número e con un error menor que $0,001$ y por tanto:

$$2,7240 < e < 2,7260$$

3.7. Aplicaciones a la Optimización.

3.7.1. Cálculo de máximos y mínimos absolutos de funciones en intervalos cerrados y acotados.

En lo que sigue vemos cómo se utiliza la continuiudad y derivabiliad de una función, que llamaremos función objetivo, para resolver problemas de optimización (Maximización y Mínimización)

MAXIMIZAR (MINIMIZAR):

$$f(x) \qquad \text{si} \qquad a \leq x \leq b.$$

• ¿Existen el máximo o mínimo absoluto? Si la función es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ el teorema de Weierstrass nos asegura que existen el máximo y el mínimo absoluto de f.

• ¿Cómo calcularlo? Buscamos los posibles extremos absolutos de la función entre los siguientes puntos :

▷ Los extremos del intervalo $x = a$ o $x = b$.

▷ Los puntos $c \in (a, b)$ en los que f no es derivable.

$\triangleright$ Los puntos $c \in (a,b)$ en los que f es derivable y $f'(c) = 0$.

Una vez obtenidos todos los posibles extremos evalúamos f en todos ellos: el punto (o puntos) donde el valor de $f(x)$ es mayor es el máximo (o los máximos) absoluto y el punto (o puntos) donde el valor $f(x)$ es menor es el mínimo (o mínimos) absoluto.

Ejemplo 104. Calcular los máximos y mínimos absolutos de $f(x) = |x-1|x$ en $[0,2]$.
Puesto que $f(x)$ es continua en $[0,2]$ podemos asegurar que existe el máximo y el mínimo absoluto. Buscamos los posibles extremos:

$\triangleright$ Los extremos del intervalo $\boxed{x=0}$ o $\boxed{x=2}$

$\triangleright$ Los puntos $x \in (0,2)$ en los que f puede no ser derivable. La función puede no ser derivable en $\boxed{x=1}$ (de hecho, se puede probar que no lo es).

$\triangleright$ Los puntos $x \in (a,b)$ en los que f es derivable y $f'(x) = 0$. Nótese que:

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Por lo tanto $f'(x) = 0$ sólo en $\boxed{x = \frac{1}{2}}$

Finalmente, evalúamos f en dichos puntos, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(1) = 0$ y $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Conclusión:

• Los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son MINIMOS ABSOLUTOS de $f(x)$ en $[0,2]$ y 0 es el valor mínimos de f en $[0,2]$.

• El punto 2 es el MÁXIMO ABSOLUTO de $f(x)$ en $[0,2]$ y 2 es el valor máximo de f en $[0,2]$.

3.7.2. Optimización en intervalos no acotados.

En algunos problemas de optimización el intervalo en el que tenemos que maximizar o minimizar la función objetivo no es acotado. Vemos algunos resultados que aseguran la existencia de máximos o mínimos absolutos en intervalos no acotados:

Teorema 105. *Sea $f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$.*

1. *Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces existe el máximo absoluto de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.*

2. *Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ entonces existe mínimo absoluto de f en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 106. 1. Calcular el máximo absoluto, si existe, de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en $\mathbb{R}$. Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0$ y $f(x) \geq 0$ podemos asegurar la existencia de máximo absoluto. Como $f(x)$ es derivable, para buscar el extremo absoluto basta resolver la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$

luego el máximo absoluto de f en $\mathbb{R}$ es $x = 0$ y el valor máximo de f en $\mathbb{R}$ es $f(0) = 1$.

2. Calcular el mínimo absoluto de $f(x) = x^2 + bx + c$. Puesto que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ existe el mínimo absoluto. Como $f(x)$ es derivable y

$$f'(x) = 2x + a = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

el mínimo absoluto es $x = \dfrac{-b}{2}$ y el valor mínimo de $f(x)$ en $\mathbb{R}$ es $f(\dfrac{-b}{2}) = \dfrac{4c-b^2}{4}$.